数理解析研究所講究録
388巻 1980年 102-113

τ-函数とRiemann-Hilbert型積分方程式のFredholm行列式について

京大・数理研 上野 喜三雄

§0　変形方程式のτ-函数（定義は本講究録の三輪，神保氏の報告を参照）で，初等的に計算可能なもの，例えば有理解，N-soliton解という場合には

$$\tau = \text{const} \det W \quad (W\text{；有限次元の行列})$$

と表現されている。(cf. [1], [2]) 特に，2×2 行列の場合のN-soliton解（AKNS形式が適用される）に対応するτ-函数は，Gelfand-Levitan積分方程式の行列式とも一致する。(cf. [2]) そこで，すぐさま思い浮ぶことは，有理解，(rankの大きい場合の) N-soliton解のτ-函数も，或る種の積分方程式の行列式－即ち，Riemann Hilbert型積分方程式のFredholm行列式－として把握できないであろうか？ということである。もとより，我々の問題意識は，モノドロミー問題から発っしているのであるから，古典的Riemann-Hilbert問題とτ-函数の関連を見ようとするのは自然でもあり，また

一度は試みてみるべき考察かと思われる。この方向に沿ったて函数の解析的把握の仕方として最も徹底したものとしては，場の演算子の真空期待値として実現するという，Holonomic Quantum Field の方法があるが，（本講究録の三輪氏の報告，及び，[4]を参照。）初等的な場合，もしくはて–商については，もう少し古典的なレベルでの議論も可能なのである。以上が，標題の意図するところである。

§1　有理解と Riemann-Hilbert 問題の関連について述べよう。まず，有理解は，次の複素領域での接続問題を解くことにより得られるということに注意する。(cf [2])

$$\begin{cases} Y(x) = \hat{Y}(x)\, e^{T(x)} & m\times m \\ \hat{Y}(x) = \sum_{\ell=0}^{N} Y_\ell x^{-\ell}, \quad Y_0 = 1, & \\ T(x) = \sum_{s=1}^{r} T_{-s} \frac{x^{s}}{(-s)} & ,\ \text{diagonal} \\ Y(x) = G\,\hat{Z}(x)\, x^{L} C & \text{---- (1.1)} \\ \hat{Z}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} Z_\ell x^{\ell}, \quad Z_0 = 1, & \\ L = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) & \mathrm{trace}\, L = 0 \end{cases}$$

定数行列 C, L 及び $T(x)$ を与えたとき，接続条件(1.1)を満す $\hat{Y}(x)$ を求めることが，丁度，変形方程式の有理解を求めることに相当する。（$\hat{Y}(x)$ の係数 Y_ℓ 達が，T_{-s} の有理函数として表わさ

れる。）（1.1）という接続条件をRiemann-Hilbert問題として言い換えると次の様になる。

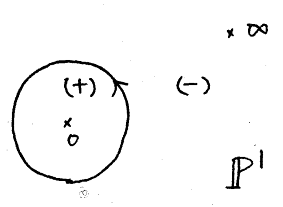
命題1　γを原点を中心とする円とする。変形方程式の有理解の構成は，次の条件を満足する $m\times m$ 行列 $\hat{Y}(x)$ を求める Riemann-Hilbert 問題と同値である。

1° $\hat{Y}(x)$ は，$\mathbb{P}^1-\gamma$ で正則かつ $\hat{Y}(x^{\pm})$ は，各々 γ 上 Hölder 連続。（$\hat{Y}(x^{\pm})$ は，$\hat{Y}(x)$ の γ の内，外部からの境界値）

2° $\hat{Y}(x^-)=\hat{Y}(x^+)H(x)$　　on $x\in\gamma$

ただし，$H(x)=x^{L}C\exp(-T(x))$ である。

3° $\lim\limits_{x\to\infty}Y(x)=1$　　(fig)



次に N-soliton 解に対する Riemann-Hilbert 問題を考えよう。N-soliton 解は，次の複素領域での接続問題を解くことによって得られるのであった。

$$Y(x)=\hat{Y}(x)x^{N}e^{T(x)} \qquad m\times m$$

$$\hat{Y}(x)=\sum_{l=0}^{N}Y_l x^{-l},\ Y_0=1,\ T(x)=\sum_{\nu=1}^{r}T_{-\nu}\frac{x^{\nu}}{(-\nu)} \quad \text{diagonal}$$

$$Y(x)=G^{(j)}\hat{Y}^{(j)}(x-a_j)^{E_1}C^{(j)} \quad \text{at } x=a_j \quad (j=1,\cdots,mN) \text{---(1.2)}$$

ただし，a_j $(j=1,\cdots,mN)$ は相異なる mN ケの点で，パラメーター $T_{-\nu}$ にはよらない。$G^{(j)}, C^{(j)}$ は，可逆行列で $C^{(j)}$ はパラメーター $T_{-\nu}$ によらな

いとする。又 $\hat{Y}^{(j)}=\sum_{\ell=0}^{\infty}Y_\ell^{(j)}(x-a_j)^\ell$ $Y_0^{(j)}=1$, $E_1=diag(1,0,\cdots0)$ とする。接続条件 (1.2) を満足する $Y(x)$ を求めることが, N-soliton解を構成することになるのである。($\hat{Y}(x)$の係数は, exp の有理式で表わされる。)これは, 次の様に言い換えられる。まず, a_jを中心とする互いに交わらない小円 γ_j $(j=1,\cdots,mN)$ を用意し, $\gamma=\bigcup_{j=1}^{mN}\gamma_j$ とおく。

命題2 変形方程式のN-soliton解の構成は, 次の条件を満足する $m\times m$ 行列 $\hat{Y}(x)$ を求めるRiemann-Hilbert問題と同値である。

1° $\hat{Y}(x)$は, $\mathbb{P}^1-\gamma$ で正則, かつ $\hat{Y}(x^\pm)$ は, 各々 γ上 Hölder 連続

2° $\hat{Y}(x^-)=\hat{Y}(x^+)H(x)$ on $x\in\gamma$

3° $\lim_{x\to\infty}Y(x)=1$

ただし, $H(x)$は各γ_j上で次の如く定義される。

$$H(x)=(x-a_j)^{E_1}C^{(j)}\exp(-T(x)) \quad \text{on } \gamma_j \quad (j=1,\cdots,mN)$$

これらの問題を積分方程式に書き直すには, 既に知られている古典的手法に従えばよい。(cf [5], [6]) 即ち, (両者に共通して) $Y_-(x)=Y(x^-)$ とおくと, $Y_-(x)$は, 次のRiemann-Hilbert型積分方程式を満足する。

$$Y_-(x)-\lambda\int_\gamma Y_-(y)K(y,x)\,dy=1 \qquad ---(1.3)$$

$$(\lambda=1)$$

$$K(y,x)=\frac{H(y)^{-1}H(x)-1}{2\pi i(y-x)}=\left(K_{j,k}(y,x)\right)_{1\leqq j,k\leqq m} \quad \text{--(1.4)}$$

積分核K(y,x)は，regularであるから，(1.3)に対して通常のFredholmの理論が適用される。それでは，(1.3)のFredholm行列式，及び小行列式(の行列)を定義しておく。

定義 1° $K^{m_1\cdots m_l}_{n_1\cdots n_l}\begin{pmatrix} y_1 \cdots y_l \\ x_1 \cdots x_l \end{pmatrix} \underset{def}{=} \det\left(K_{m_\mu n_\nu}(y_\mu, x_\nu)\right)_{1\leq\mu,\nu\leq l}$ --(1.5)

2° (Fredholm行列式)

$$\Delta(\lambda) \underset{def}{=} \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^l}{l!}\int_{\Gamma\times\cdots\times\Gamma}\!\!\cdots\!\int dy_1\cdots dy_l \sum_{n_1}\cdots\sum_{n_l} K^{n_1\cdots n_l}_{n_1\cdots n_l}\begin{pmatrix} y_1 \cdots y_l \\ y_1 \cdots y_l \end{pmatrix} \quad \text{--(1.6)}$$

3° (Fredholm小行列式)

$$\Delta\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}; \begin{matrix} y \\ x \end{matrix} : \lambda\Big) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^l}{l!}\int_{\Gamma\times\cdots\times\Gamma}\!\!\cdots\!\int dy_1\cdots dy_l \sum_{n_1}\cdots\sum_{n_l} K^{j\, n_1\cdots n_l}_{k\, n_1\cdots n_l}\begin{pmatrix} y\ y_1 \cdots y_l \\ x\ y_1 \cdots y_l \end{pmatrix} \quad \text{---(1.7)}$$

4° $\Delta\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}:\lambda\Big)=\left(\Delta\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}; \begin{matrix} y \\ x \end{matrix};\lambda\Big)\right)_{1\leqq j,k\leqq m}$ — (1.8)

このとき，(1.3)のレゾルベント核R(y,x,λ)は，

$$R(y,x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Delta\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}:\lambda\Big) \quad \text{---(1.9)}$$

(Fredholmの関係式)

によって与えられる。従って，$\Delta(1)\neq 0$ とすれば，(1.3)の一意連解は，Fredholmの定理により

$$Y_-(x)=1+\int_{\Gamma}\frac{1}{\Delta(1)}\Delta\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}:1\Big)\,dy \quad \text{---(1.10)}$$

と表示される。

さて，Riemann-Hilbert問題の解は，方程式(1.3)を満足するが，逆は必ずしも言えない。ところが，$\Delta(-1)\neq 0$ が成立していれば，逆も正しいことが知られている。(cf [5], [6])

以上をまとめて次の命題を得る。

命題3　$\Delta(1)\neq 0$，かつ $\Delta(-1)\neq 0$ とすれば，有理解，Nsoliton解に対するRiemann-Hilbert 問題の解 $\hat{Y}(x)$は，

$$\hat{Y}(x) = 1 + \int_{\gamma} \frac{1}{\Delta(1)} \Delta\left(\begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix}; \lambda\right) dy \qquad \text{---} (1.10)$$

と表示される。

§2. τ-函数と Fredholm 行列式

我々は§1で定義した Fredholm 行列式が実は，τ-函数に他ならぬことを示したいのであるが，その為には，次の三輪神保(cf [3])によるτ-函数の特徴付けの定理を必要とする。

定理　τ-函数は，次の式で定数倍を除いて特徴付けられる。

$$\hat{Y}_{\alpha\alpha}(x) = \frac{\tau(\cdots, t_{-1,\alpha}+\frac{1}{z}, \cdots, t_{-r,\alpha}+\frac{1}{z^r}, \cdots)}{\tau(t)} \quad \mathrm{mod}\, O(x^{-r-1}) \quad \text{for } \alpha = 1,\cdots,m \qquad \text{---} (2.1)$$

ただし，$T_{-s} = diag(t_{-s,1}, \cdots, t_{-s,m})$

この定理は，大変強力であり，これを用いると $\Delta(1)$ がτ-函数であることは，次の様に示される。

$K(y.x)$に含まれるパラメーター T_{-s} の第α成分 $t_{-s.\alpha}$ を

$$t_{-s.\alpha} \longmapsto t_{-s.\alpha} + x^{-s} \qquad (s=1,\cdots,r)$$

shiftして得られるものを $\widetilde{K}(y.x)$ とおく。又, $\widetilde{K}^{n_1\cdots n_l}_{m_1\cdots m_l}\begin{pmatrix} y_1\cdots y_l \\ z_1\cdots z_l \end{pmatrix}$ $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ は, $\widetilde{K}(y.x)$ から (1.5), (1.6)を通じて定義されるものとする。我々の得た定理は次の通りである。

定理4　Riemann-Hilbert 問題の解 $\hat{Y}(x)$ (1.10) に対して

$$\frac{\widetilde{\Delta}(1)}{\Delta(1)} \equiv \hat{Y}_{\alpha\alpha}(x) \quad \mathrm{mod}\ O(x^{-r-1}) \qquad \text{--- (2.2)}$$

$$\text{for } \alpha = 1,\cdots,m$$

が成立する。従って $\Delta(1)$は, τ-函数である。

この定理の証明は概略次の如く行われる。まず, 次の命題を示す。

命題5　パラメーターのshiftは, $\alpha=1$とする。

$p_1+q_1=p_2+q_2=l$, 　$n_{p_1+1},\cdots,n_l,\ m_{p_2+1},\cdots,m_l \neq 1$ とする。

このとき, 次の関係が成立する。

$$\widetilde{K}^{\overbrace{1\cdots 1}^{p_1}\ n_{p_1+1}\cdots n_l}_{\underbrace{1\cdots 1}_{p_2}\ m_{p_2+1},\cdots m_l}\begin{pmatrix} y_1\cdots y_{p_1} & y_{p_1+1}\cdots y_l \\ z_1\cdots z_{p_2} & z_{p_2+1}\cdots z_l \end{pmatrix}$$

$$\equiv \exp\Big(\sum_{1\le\lambda_1\le p_1} T^{(\infty)}(y_{\lambda_1}) - \sum_{1\le\lambda_2\le p_2} T^{(\infty)}(z_{\lambda_2})\Big)$$

$$\times\Bigg\{K^{1\cdots 1\ n_{p_1+1}\cdots n_l}_{1\cdots 1\ m_{p_2+1}\cdots m_l}\begin{pmatrix} y_1\cdots y_{p_1} & y_{p_1+1}\cdots y_l \\ z_1\cdots z_{p_2} & z_{p_2+1}\cdots z_l \end{pmatrix}$$

$$+\sum_{\substack{1\le\mu_1\le p_1\\1\le\mu_2\le p_2}} (-)^{\mu_1+\mu_2} f_{\mu_1\mu_2} K^{1\cdots\overset{\mu_1}{\check{}}\cdots 1\ n_{p_1+1}\cdots n_l}_{1\cdots\underset{\hat{\mu}_2}{}\cdots 1\ m_{p_2+1}\cdots m_l}\begin{pmatrix} y_1\cdots\overset{\mu_1}{\check{}}\cdots y_{p_1} & y_{p_1+1}\cdots y_l \\ z_1\cdots\underset{\hat{\mu}_2}{}\cdots z_{p_2} & z_{p_2+1}\cdots z_l \end{pmatrix}\Bigg\}$$

--- (2.3)

ただし，$T^{(\infty)}(y) = \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{-s}\left(\frac{y}{x}\right)^{s}$，

$$f_{\mu\nu} = \frac{\exp\{T^{(\infty)}(z_\nu) - T^{(\infty)}(y_\mu)\} - 1}{2\pi i (z_\nu - y_\mu)}$$

であり，$\underset{\mu}{\wedge}$ は，μ 番目の index，又は変数を除くことを意味する。

証明は，l に関する帰納法によるが，詳しいことは省略する。この命題の系として次を得る。

<u>系 6</u>　($\alpha = 1$ とする。) $p_1 + q_1 = l$，$n_j \geq 2$，$(j = p_1+1, \cdots, l)$

$$\tilde{K}^{1 \cdots 1\ n_{p_1+1} \cdots n_l}_{\underbrace{1 \cdots 1}_{p_1}\ n_{p_1+1} \cdots n_l}\begin{pmatrix} y_1 \cdots y_{p_1}\ y_{p_1+1} \cdots y_l \\ y_1 \cdots y_{p_1}\ y_{p_1+1} \cdots y_l \end{pmatrix}$$

$$\equiv K^{1 \cdots 1\ n_{p_1+1} \cdots n_l}_{1 \cdots 1\ n_{p_1+1} \cdots n_l}\begin{pmatrix} y_1 \cdots y_l \\ y_1 \cdots y_l \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{-1}{2\pi i} \sum_{1 \leq \mu_1 \mu_2 \leq p_1} (-)^{\mu_1+\mu_2} \left(\sum_{s=1}^{r} \frac{y_{\mu_1}^{s-1}}{x^{s}} \right) K^{1 \cdots \overset{\mu_1}{\vee} \cdots 1\ n_{p_1+1} \cdots n_l}_{1 \cdots \underset{\hat{\mu}_2}{} \cdots 1\ n_{p_1+1} \cdots n_l}\begin{pmatrix} y_1 \cdots \overset{\mu_1}{\vee} \cdots y_{p_1}\ y_{p_1+1} \cdots y_l \\ y_1 \cdots \underset{\hat{\mu}_2}{} \cdots y_{p_1}\ y_{p_1+1} \cdots y_l \end{pmatrix}$$

$$\mod O(x^{-r-1}) \qquad \text{---}(2.4)$$

<u>(定理 4 の略証)</u>　($\alpha = 1$ として行なう)

系 6 から

$$\frac{1}{l!} \int_{r \times \cdots \times r} \cdots \int dy_1 \cdots dy_l \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_l} \tilde{K}^{n_1 \cdots n_l}_{n_1 \cdots n_l}\begin{pmatrix} y_1 \cdots y_l \\ y_1 \cdots y_l \end{pmatrix}$$

$$\equiv \int_{r \times \cdots \times r} \cdots \int dy_1 \cdots dy_l \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_l} K^{n_1 \cdots n_l}_{n_1 \cdots n_l}\begin{pmatrix} y_1 \cdots y_l \\ y_1 \cdots y_l \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \iint_{r \times r} dy\, dz \sum_{s=1}^{r} \frac{z^{s-1}}{x^{s}} \times \frac{1}{(l-2)!} \int_{r \times \cdots \times r} \cdots \int dy_1 \cdots dy_{l-2}$$

$$\sum_{n_1} \cdots \sum_{n_{l-2}} K^{1\ n_1 \cdots n_{l-2}}_{1\ n_1 \cdots n_{l-2}}\begin{pmatrix} y\ y_1 \cdots y_{l-2} \\ z\ y_1 \cdots y_{l-2} \end{pmatrix}$$

$$\mod O(x^{-r-1})$$

この式をすべての l について加えれば，$\hat{\Delta}(1) \equiv \Delta(1)\hat{Y}(x)$ mod

$O(x^{-r-1})$ を得る。Q.E.D.

§3. τ-quotient と Fredholm 行列式

§§1 と同じ思想圏で Schlesinger 変換を Riemann-Hilbert 問題として捉えることができる。

次の微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dx}Y(x)=A(x)Y(x) \qquad \text{---}(3.1)$$

ただし、$A(x)=-\sum_{s=1}^{r}A_{-s}x^{s-1}+A_0x^{-1}$ $\quad m\times m$

$A_{-r}=T_{-r}^{(\infty)}$ (generic. diagonal)

$A_0=G^{(0)}T_0^{(0)}G^{(0)-1}$, $T_0^{(0)}$ (generic diagonal)

(3.1)の $x=\infty$ で正規化された形式解 $Y^{(\infty)}(x)$

$$Y^{(\infty)}(x)=\hat{Y}^{(\infty)}(x)\exp\left(\sum_{s=1}^{r}T_{-s}^{(\infty)}\frac{x^s}{(-s)}+T_0^{(\infty)}\log\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$Y_1^{(\infty)}$: (3.1)の解の基本系 s.t $\exists\, \mathcal{S}_1$ ($x=\infty$ における角領域)

$$Y_1^{(\infty)}\sim Y^{(\infty)} \quad \text{as } x\to\infty \text{ in } \mathcal{S}_1$$

(3.2)を $x=0$ で Gauge 変換する。

$$\frac{d}{dx}Y(x)=G^{(0)-1}A(x)G^{(0)}Y(x) \qquad \text{---}(3.2)$$

(3.2) の $x=0$ で正規化された解 $Y^{(0)}(x)$

$$Y^{(0)}(x)=\hat{Y}^{(0)}(x)x^{T_0^{(0)}}$$

$x=\infty$ と $x=0$ を結ぶ接続行列を $C^{(0)}$ とする。即ち

$$Y_1^{(\infty)}(x)=G^{(0)}Y^{(0)}(x)C^{(0)} \qquad \text{---}(3.3)$$

(3.1)に対して次のSchlesinger変換を行なう。

$$\begin{Bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & L^{(0)} \end{Bmatrix}, \quad L^{(0)} = diag(\mu_1, \cdots, \mu_m), \quad trace\, L^{(0)} = 0.$$

$$H(x) \underset{def}{=} x^{T_0^{(0)} + L^{(0)}} C^{(0)} Y_1^{(\infty)-1} \qquad \text{--- (3.4)}$$

とおくと，(3.3)より $H(x)$は，$\mathbb{P}^1 - \{\infty, 0\}$ で1価正則である。次のRiemann-Hilbert 問題を考える。

γ: $x=0$ を中心とする小円。次の条件を満足する$m \times m$行列 $R(x)$を求めよ。

1° $R(x)$は，$\mathbb{P}^1 - \gamma$ で正則かつ $R(x^{\pm})$ は，γ上でHölder連続

2° $R(x^-) = R(x^+) H(x)$ on $x \in \gamma$.

3° $\lim_{x \to \infty} R(x) = 1$.

<u>命題7</u>　$R(x)$を上述のRiemann-Hilbert 問題の解とする。

$$Y(x) \longmapsto R(x) Y(x) = Y'(x)$$

という変換は，Schlesinger変換 $\begin{Bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & L^{(0)} \end{Bmatrix}$ と同じである。

さて，Schlesinger 変換した後の$x=\infty$での正規化された形式解を

$$Y'^{(\infty)}(x) = \hat{Y}'^{(\infty)}(x) \exp\left\{ \sum_{\nu=1}^{r} T_{-\nu} \frac{x^\nu}{(-\nu)} + T_0^{(\infty)} \log\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

とすると

$$Y'^{(\infty)}_{1,\alpha\alpha} - Y^{(\infty)}_{1,\alpha\alpha} = R_{1,\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial t_{-1,\alpha}} \log(\tau'/\tau) \qquad \text{--- (3.5)}$$

である。我々は，§2と同じ方法を用いて，次の命題を得た。

<u>定理8</u> $\frac{\partial}{\partial t_{-1,\alpha}}\Delta(1)=R_{1,\alpha\alpha}$ ----- (3.6)

ただし，$\Delta(1)$は次の積分方程式のFredholm行列式である。

$$R_-(x)-\lambda\int_\gamma R_-(y)K(y,x)dy=1 \qquad \text{--- (3.7)}$$

$$K(y,x)=\frac{H(y)^{-1}H(x)-1}{2\pi i(y-x)}$$

((3.7)はもちろん上述のRiemann-Hilbert問題に対応する方程式)

Fredholm行列式$\Delta(1)$がτ-quotient (τ'/τ)に一致することを示すには，高次のパラメーター$t_{-s,\alpha}$ $(s\geq 2)$に関する微分を調べないといけないので，現在のところ，それは完成されていない。又，不確定特異点が2つ以上ある場合については，Riemann-Hilbert問題としての定式化は容易なのであるが，τ-函数の計算がうまくゆかない。

以上で，この問題についての現状報告をおわる。

(§2への<u>追記</u>)

不思議なことに，次の命題が成立する。

<u>命題9</u> 実は，$\Delta(1)=\mathrm{const}\,\Delta(-1)$ である!!

References

[1] K.Ueno, RIMS preprint 309.

[2] M.Jimbo, T.Miwa, K.Ueno, RIMS preprint 319.

[3] M.Jimbo, T.Miwa, RIMS preprint 329.

[4] T.Miwa, RIMS preprint 330.

[5] N.I.Muskhelishvili, Singular Integral Equations.

[6] J.Plemelj, Problems in the sense of Riemann and Klein.